

Cap. 7. ~~Contexto variacional~~

As equações de Lagrange

Lagrange (1736-1813) publicou em 1788 sua versão da mecânica, que se apoia nas ideias do cálculo variacional. Esta formulação tem 2 vantagens sobre a newtoniana:

- suas equações têm a mesma forma em todos os sistemas de coordenadas
- ela elimina a necessidade de considerar as forças de vínculo

Nesta apresentação introdutória desta formulação, vamos tratar apenas situações nas quais as forças - que não as de vínculo - sejam conservativas, ou que, pelo menos, possam ser derivadas de uma função energia potencial (exceção feita à força sobre forças magnéticas). Esta restrição pode ser relaxada, como você verá na disciplina seguinte.

7.1 As eq. de Lagrange para movimento sem vínculo.

Considere partícula movendo-se sem vínculo em 3D, sujeita a uma força resultante conservativa $\vec{F}(\vec{r})$. Sua energia cinética é

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

e sua energia potencial $U = U(\vec{r}) = U(x, y, z)$

A função lagrangeana é definida por

$$\mathcal{L} = T - U \quad (\neq E, \text{energia total})$$

(porque? Não há resposta simples m)

Considere as derivadas

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = - \frac{\partial U}{\partial x} = F_x, \text{ e}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} = p_x$$

$$\text{Da 2ª lei, } \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \quad (\text{se } \mathcal{L} \text{ foi escrita em referencial inercial})$$

(e o mesmo para y e z)

Portanto a 2ª lei implica nas eq. de Lagrange (em coordenadas cartesianas, pelo menos) neste caso.

O raciocínio também funciona ao contrário, e mostra que as formulações são exatamente equivalentes neste caso: a trajetória determinada pela 2ª lei coincide com aquela determinada pelas eq. de Lagrange.

Isto implica em que $S = \int \mathcal{L} dt$ seja estacionária, como vimos no capítulo anterior.

Princípio de Hamilton (1805-1865):

A trajetória seguida por uma partícula entre 2 pontos 1 e 2 no intervalo de tempo (dado) $[t_1, t_2]$ é aquela que torna estacionária a integral de ação $S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt$.

Apesar de só termos provado isto para uma partícula em coordenadas cartesianas, veremos que o princípio é válido para uma enorme classe de sistemas mecânicos e para (quase) qualquer escolha de coordenadas.

O princípio de Hamilton foi generalizado em muitos ramos da Física - em teorias de campo, em particular - e dá unidade a diversas áreas. No século XX teve papel importante na formulação das teorias quânticas.

Vamos considerar outro ^{conjunto} sistema de coordenadas generalizadas q_1, q_2 e q_3 com a propriedade que a cada posição $\vec{r}$ esteja associada 1 e só 1 valor de (q_1, q_2, q_3) , e vice-versa.

$$q_i = q_i(\vec{r}) \quad \text{e} \quad \vec{r} = \vec{r}(q_1, q_2, q_3)$$

bijetoras.

Com estas equações de transformação de coordenadas podemos escrever (x, y, z) e $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ em termos de (q_1, q_2, q_3) e $(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3)$, e reescrever a Lagrangeana na forma

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_1, q_2, q_3, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3)$$

e a ação

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_1, q_2, q_3, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3) dt$$

O valor de S não é alterado por esta transformação. Portanto, S continua

sendo estacionária para variações de caminho em torno da trajetória correta no novo sistema de coordenadas; portanto, a trajetória correta deve satisfazer a

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i},$$

qualquer que seja o conjunto (q_1, q_2, q_3) , inclusive se forem coordenadas de um referencial inercial.

Mas cuidado: devemos primeiro escrever $\mathcal{L} = T - U$ em um referencial inercial, e depois fazer a mudança de coordenadas.

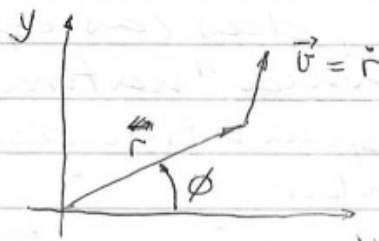
Volte a nossa demonstração inicial: em coordenadas cartesianas, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = F_x$ e $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = p_x$. Em coordenadas generalizadas, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$ não é mais uma componente ∂q_i da força, mas seu papel é semelhante; o mesmo ocorre com $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$, e por isso chamamos estas $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$ derivadas de força generalizada e momento generalizado. Com esta nomenclatura, cada eq. de Lagrange pode ser descrita como:

força generalizada = taxa de variação do momento generalizado.

Uma e outra grandezas não tem, necessariamente, as dimensões de força e momento, como ilustra o exemplo a seguir

Exemplo: partícula em 2D (coordenadas polares)

Em todos os problemas onde usamos a mecânica Lagrangeana, nossa 1ª tarefa é escrever $\mathcal{L} = T - U$ em termos das coordenadas escolhidas.



$$\vec{v} = \dot{r} \hat{r} + r \dot{\phi} \hat{\phi}$$

$$T = \frac{1}{2} m \vec{v} \cdot \vec{v} =$$

$$= \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2), \text{ e}$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) - U(r, \phi)$$

- equações para r :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} \right)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = m r \dot{\phi}^2 - \frac{\partial U}{\partial r} = \frac{d}{dt} (m \dot{r}) = m \ddot{r}$$

$$- \frac{\partial U}{\partial r} = F_r \Rightarrow F_r = m (\ddot{r} - r \dot{\phi}^2) = m a_r$$

(que é apenas a componente radial da 2ª lei, sem o trabalho de derivar a_r)

- equações para ϕ :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = - \frac{\partial U}{\partial \phi}; \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = m r^2 \dot{\phi}$$

$$\Rightarrow - \frac{\partial U}{\partial \phi} = \frac{d}{dt} (m r^2 \dot{\phi})$$

Interpretando as equações: o gradiente em coordenadas polares é

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \phi} \hat{\phi}, \text{ e } F_{\phi} = - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \phi}$$

e a eq. Lagrange é $r F_\phi = 2(\text{origem}) =$
 $= \frac{d}{dt} L$, o momento angular
em relação à origem.

Este resultado ilustra uma característica importante das eq. Lagrange: quando escolhemos as coordenadas generalizadas apropriadas, elas (as equações) aparecem numa forma "natural", envolvendo neste caso as quantidades torque e momento angular.

O exemplo ilustra também outra característica importante: quando a força generalizada (componente i) $\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$, o momento generalizado correspondente $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ tem derivada temporal nula $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$, portanto, conservado. Então, se L não depende (explicitamente) de uma coordenada generalizada, temos imediatamente uma lei de conservação.

. Sistemas de muitas partículas (sem vínculo)

A extensão das ideias acima para sistema de N partículas sem vínculo (um gás de N moléculas, por exemplo) é imediata. Vamos aqui mostrar o raciocínio para $N=2$, com o objetivo principal de exibir a forma das eq. de Lagrange para $N>1$.

$$\mathcal{L}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2) = \frac{1}{2} m_1 \dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\vec{r}}_2^2 - U(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$$

Como sempre, a força resultante sobre cada partícula i é $\vec{F}_i = -\nabla_i U$, e a lei de Newton aplicada a cada uma é

$$F_{1x} = \dot{p}_{1x}, \quad F_{1y} = \dot{p}_{1y}, \quad \dots, \quad F_{2z} = \dot{p}_{2z}$$

Cada uma destas é equivalente a 1 eq. Lagrange,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_1}, \quad \dots, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z_2} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}_2}, \quad \text{que}$$

implicam na estacionariedade da integral de ação $S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt$.

Mudemos agora o sistema de coordenadas para o conjunto arbitrário (e supostamente conveniente!)

$q_1, q_2, \dots, q_6$. Como S deve também ser estacionária neste sistema, isto implica na veracidade das 6 eq. Lagrange,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \quad (i=1, \dots, 6)$$

Para sistema de N partículas, resultam $3N$ eq. Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \quad (i=1, \dots, 3N)$$

qualquer que seja a escolha das $3N$ coordenadas $q_1, \dots, q_{3N}$ necessárias para a descrição do sistema.

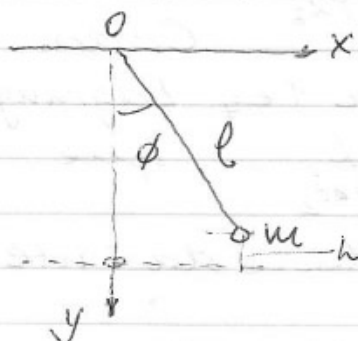
— 08/05/09 —

7.2 Sistemas com vínculo: um exemplo

Uma das maiores vantagens da abordagem Lagrangeana é sua habilidade na manipulação de sistemas com vínculos, que ~~os obrigam~~ não permiti-

tam que ele se mova arbitrariamente no espaço (exemplo: conta em fio de arame) (outro: corpo rígido).

Considere o pêndulo simples



$$\text{vínculo: } x^2 + y^2 = l^2$$

↓

sistema tem 1 grau de liberdade

Podemos eliminar, por exemplo, $y = \sqrt{l^2 - x^2}$ e exprimir tudo em função apenas de x . Mas o melhor é exprimir ambos x e y em função de um único parâmetro ϕ .

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\phi}^2$$

$$U = m g h = m g l (1 - \cos \phi)$$

Como a evolução do sistema deve também neste caso (com vínculo) obedecer à eq. Lagrange (como mostraremos a seguir),

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \dot{\phi}) = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\phi}^2 - m g l (1 - \cos \theta)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -m g l \sin \theta$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = m l^2 \dot{\phi},$$

$$-m g l \sin \theta = \frac{d}{dt} (m l^2 \dot{\phi}) = m l^2 \ddot{\phi}$$

torque exercido
pelo peso

momento de
inércia

(equivale a $\mathcal{L} = I \dot{\phi}$)

7.3. Sistemas com vínculos: caso geral.

Coordenadas generalizadas

Considere sistema arbitrário de N partículas com posições especificadas por $\vec{r}_\alpha$ ($\alpha=1, m, N$). Os parâmetros

q_1, m, q_n são um conjunto de coordenadas generalizadas deste sistema se

$$\vec{r}_\alpha = \vec{r}_\alpha(q_1, m, q_n, t) \quad (\alpha=1, m, N)$$

e

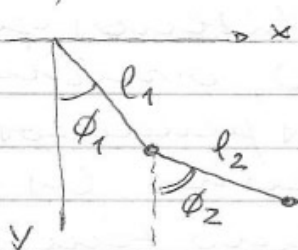
$q_i = q_i(\vec{r}_1, m, \vec{r}_N, t)$ ($i=1, m, n$),
e se $n (\leq 3N)$ é o menor número que possibilite esta descrição.

Para um sistema com vínculos, $n \leq 3N$; para corpo rígido ($N \sim 10^{23}$), $n=6$: 3 coordenadas do CM + 3 para determinar sua orientação)

Exemplos:

- pêndulo simples: $\vec{r}=(x, y) = (l \sin \phi, l \cos \phi)$
 $\phi = \tan^{-1}(\frac{x}{y})$

- pêndulo duplo



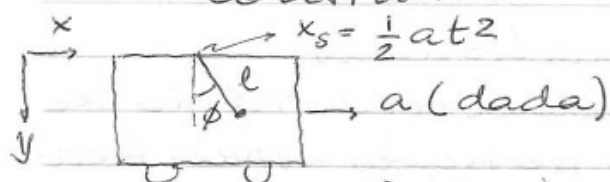
$$\vec{r}_1 = (l_1 \sin \phi_1, l_1 \cos \phi_1) = \vec{r}_1(\phi_1)$$

$$\vec{r}_2 = (l_1 \sin \phi_1 + l_2 \sin \phi_2, l_1 \cos \phi_1 + l_2 \cos \phi_2) = \vec{r}_2(\phi_1, \phi_2)$$

Nestes 2, as transformações de coordenadas não envolvem o tempo t - neste caso, ~~o~~ o conjunto de coordenadas generalizadas é dito natural.

(felizmente o + conveniente em muitos casos)

- pêndulo em vagão com aceleração constante



$$\vec{r} = (x, y) = \left(\frac{1}{2} a t^2 + l \sin \phi, l \cos \phi \right) = \vec{r}(\phi, t)$$

- Graus de liberdade

É o número de coordenadas que podem ser variadas independentemente num pequeno deslocamento - o número de "direções" independentes nas quais o sistema pode se mover a partir de uma dada configuração inicial. Por exemplo: o pêndulo simples tem apenas 1 grau de liberdade, enquanto o pêndulo duplo tem 2. Uma partícula livre em 3D tem 3, um gás de N partículas tem $3N$.

Quando o número de graus de liberdade de um sistema de N partículas em 3D é menor que $3N$ dizemos que ele tem vínculos (em 2D, o número correspondente é $2N$). Os pêndulos simples e duplo têm vínculos. Os N átomos de um corpo rígido têm apenas 6 graus de liberdade: é um sistema com muitos vínculos.

Quando o número de graus de liberdade de um sistema é igual

ao número de coordenadas generalizadas necessárias para descrever sua configuração o sistema é dito holonômico, e são mais fáceis de tratar que os não-holonômicos. Nos restringiremos aqui aos primeiros.

(Exemplo de sistema não-holonômico: bola rígida que pode rolar sem deslizar sobre um plano)

A evolução temporal de um sistema holonômico com coordenadas generalizadas $q_1, \dots, q_n$ e energia potencial $U(q_1, \dots, q_n, t)$ - que pode depender de t - é determinada pelas n eq. de Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}, \quad i=1, \dots, n$$

onde $\mathcal{L} = T - U$.

7.4. Demonstração da afirmação acima para sistemas com vínculos

Farei isso para uma partícula - a generalização para qualquer número é simples - confinada a se mover sobre um plano: tem, portanto, 2 graus de liberdade.

Existem 2 tipos de força sobre a partícula:

(i) forças de vínculo - neste caso, a normal. Elas podem, no caso geral, ser não conservativas, mas isto não vai importar. Um dos objetivos da formu-

ações Lagrangeana é encontrar equações de movimento que não as envolva - até porque em geral não desejamos conhecê-las. Sua resultante é $\vec{F}_{\text{vin}}$.

→ (ii) as demais forças, de resultante $\vec{F}$, suposta derivável de uma energia potencial $\vec{F} = -\nabla U(\vec{r}, t)$. (se todas elas são conservativas, então $U = U(\vec{r})$ não depende de t).

A resultante total é $\vec{F}_{\text{tot}} = \vec{F}_{\text{vin}} + \vec{F}$

Definimos $\mathcal{L} = T - U$, que exclui, portanto, qualquer referência às forças de vínculo.

A integral de ações sobre a trajetória é estacionária

A trajetória "correta" é $\vec{r}(t)$, com $\vec{r}(t_1) = \vec{r}_1$ e $\vec{r}(t_2) = \vec{r}_2$. $\vec{R}(t)$, que passa por estes mesmos 2 pontos (terminais) é $\vec{R}(t) = \vec{r}(t) + \vec{e}(t)$, todos eles no plano do movimento, $\vec{e}(t_1) = \vec{e}(t_2) = 0$. Seja $S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(\vec{R}, \dot{\vec{R}}, t) dt$ e $S_0 = S(\vec{R} = \vec{r})$.

Vamos provar que S_0 é estacionário, isto é, que $\delta S = S - S_0$ é zero em primeira ordem em $\vec{e}$, a "distância" entre a trajetória correta e a incorreta.

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta \mathcal{L} dt, \quad \delta \mathcal{L} = \mathcal{L}(\vec{R}, \dot{\vec{R}}, t) - \mathcal{L}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$$

$$\delta \mathcal{L} = \frac{1}{2} m [(\dot{\vec{r}} + \dot{\vec{e}})^2 - \dot{\vec{r}}^2] - [U(\vec{r} + \vec{e}, t) - U(\vec{r}, t)]$$

$$\delta \mathcal{L} = m \dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{e}} - \vec{e} \cdot \nabla U + O(\epsilon^2)$$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} [m \dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{e}} - \vec{e} \cdot \nabla U] dt =$$

$$= - \int_{t_1}^{t_2} \vec{e} \cdot [m \ddot{\vec{r}} + \nabla U] dt$$

$$= - \int_{t_1}^{t_2} \vec{e} \cdot \vec{F}_{\text{tot}} dt \quad ; \text{ mas } \vec{F}_{\text{vin}} \text{ é normal (perpendicular)}$$

ao plano de movimento, onde está $\vec{e}$

$$\Rightarrow \vec{e} \cdot \vec{F}_{\text{vin}} = 0 \quad \text{e} \quad \delta S = 0 \quad \text{cqd (parcial)}$$

Provamos o princípio de Hamilton para variações da trajetória que sejam consistentes com o vínculo, e não (completamente) arbitrárias, como deveríamos $\Rightarrow$ isto quer dizer que não provamos - nem podemos! - as eq. Lagrange para as 3 coordenadas cartesianas, por exemplo!

Por outro lado, podemos prová-las com respeito às coordenadas generalizadas apropriadas, que são aquelas (z, neste caso) que podem ser variadas independentemente sempre consistentemente com os vínculos! Por isso, quando escrevemos a integral de ação em termos destas coordenadas

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2, t) dt,$$

qualquer variação da trajetória será

necessariamente consistente com os vínculos, e vale, portanto, a demonstração anterior.

Foi essencial para nossa demonstração que as forças que não as de vínculo fossem derivadas de energia potencial.

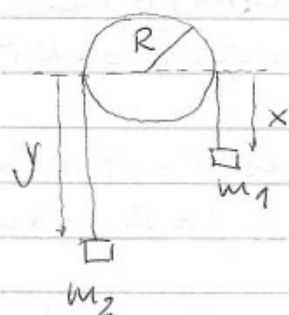
Uma força que obviamente não satisfaz a esta exigência é a de atrito, que não pode ser classificada como de vínculo (não é normal à superfície, em nosso caso) e não pode ser derivada de energia potencial. Portanto, quando ela está presente as eq. Lagrange não valem na forma mostrada e precisam ser modificadas. O resultado desta modificação não as tornam muito atraentes, como você verá em problema da lista de exercícios.

7.5 Exemplos das eq. Lagrange

Vamos mostrar 5; os 2 primeiros podem ser resolvidos de maneira simples com o formalismo Newtoniano, mas mesmo estes já mostram algumas vantagens do formalismo Lagrangeano, em especial com relação às forças de vínculo. Os 3 últimos exigiriam muito esforço no formalismo Newtoniano, mas o Lagrangeano nos permite escrever as eq. movimento quase sem pensar.

Os exemplos ilustram que o formalismo Lagrangeano nos dá uma ferramenta que (quase) sempre nos permite escrever sem esforço as eq. movimento. Por outro lado, ele não pode garantir que estas sejam fáceis de resolver. Mas, mesmo quando elas não tem soluções analíticas, são o primeiro passo para compreender a solução e frequentemente sugerem um ponto de partida para uma solução aproximada, além de dar respostas simples a certas questões subsidiárias (tais como as posições de equilíbrio). E sempre podemos resolvê-las numericamente, dadas as condições iniciais.

Exemplo 1: máquina de Atwood.



(fio inextensível de comprimento ℓ , roldana de massa desprezível montada em rolamento sem atrito)

x e y não podem variar independentemente:

$$x + y + \pi R = \ell \Rightarrow y = -x + \text{const.}$$

Usemos x como (única) coordenada generalizada ($\dot{y} = -\dot{x}$).

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{x}^2$$

$$U = -m_1 g x - m_2 g y = -(m_1 + m_2) g x + \text{const}$$

$$e \quad \mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{x}^2 + (m_1 - m_2) g x$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = (m_1 - m_2) g \quad ; \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = (m_1 + m_2) \dot{x}$$

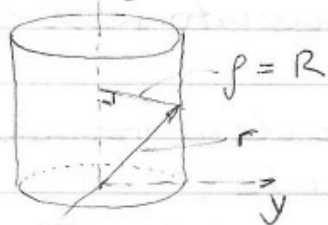
$$\Rightarrow (m_1 - m_2) g = \frac{d}{dt} [(m_1 + m_2) \dot{x}] = (m_1 + m_2) \ddot{x}$$

$$\ddot{x} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g \quad (\text{cheque o sinal})$$

(escolhendo m_1 e m_2 parecidos, a aceleração $\ll g$ fica + fácil de medir: a máquina de Atwood foi um método razoavelmente preciso de medir g no passado).

- solução Newtoniana (faça!)

Exemplo 2: Partícula confinada a se mover sobre (a superfície de) um cilindro circular sem atrito de raio R , sob a ação de força $\vec{F} = -k\vec{r}$ (lei de Hooke 3D)



Posição especificada por ϕ e z ($\rho = R$ fixo)

$\Downarrow$

Sistema (holonômico) com 2 graus de liberdade e

(2) coordenadas generalizadas (z, ϕ)

$$\vec{v}: v_\rho = 0, v_\phi = R\dot{\phi}, v_z = \dot{z}$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} m (R^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2)$$

$$\vec{F} = -k\vec{r} \Rightarrow U = \frac{1}{2} k r^2 = \frac{1}{2} k (R^2 + z^2)$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m (R^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2} k (R^2 + z^2)$$

2 graus de liberdade $\Rightarrow$ 2 equações de movimento:

$$z: \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = -kz = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} = \frac{d}{dt} (m \dot{z}) = m \ddot{z} \quad (\text{MHS})$$

$$\phi: \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \frac{d}{dt} (m R^2 \dot{\phi})$$

em relação ao eixo z é conservado.



$$z(t) = A \cos(\omega t - \delta)$$

ϕ é constante

—13/05/09—

Estes exemplos ilustram os passos a dar para resolver problemas pelo método Lagrangeano (se todos os vínculos são holonômicos e as demais forças deriváveis de energia potencial):

(1) Escreva as energias cinética e potencial - e portanto a Lagrangeana $\mathcal{L} = T - U$ - usando um referencial inercial conveniente.

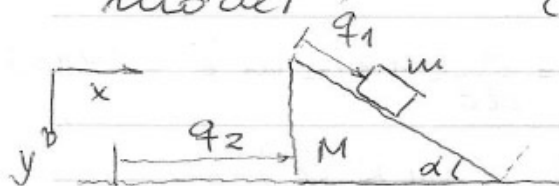
(2) Escolha um conjunto conveniente de (n) coordenadas generalizadas q_i e encontre expressões para as coordenadas usadas no passo 1 em termos destas coordenadas generalizadas

(passos 1 e 2 podem ser invertidos)

(3) Reescreva $\mathcal{L}$ em termos de q_i e $\dot{q}_i$.

(4) Escreva as eq. Lagrange.

Exemplo 3: Bloco deslizando sobre rampa móvel (sem atrito) (rampa tem comprimento ℓ .)



Tempo para deslizamento?

Sistema tem 2 graus de liberdade. Se encontrarmos $\ddot{q}_1$ (aceleração do bloco relativa à rampa) o problema estará resolvido.

$$(1) \quad T_M = \frac{1}{2} m \dot{q}_2^2$$

(2) Bloco é mais complicado:

$\dot{q}_1$ é velocidade relativa à rampa:

$$\vec{v} = (v_x, v_y) = (\dot{q}_1 \cos \alpha + \dot{q}_2, \dot{q}_1 \sin \alpha),$$

$$T_m = \frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2) = \frac{1}{2} m (\dot{q}_1^2 \cos^2 \alpha + \dot{q}_2^2 + 2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \cos \alpha + \dot{q}_1^2 \sin^2 \alpha) =$$

$$= \frac{1}{2} m (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + 2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \cos \alpha)$$

$$U_M = \text{constante} = 0; \quad U_m = -mgy = -mgq_1 \sin \alpha$$

$$(3) \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2} (m+M) \dot{q}_2^2 + \frac{1}{2} m (\dot{q}_1^2 + 2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \cos \alpha) + mgq_1 \sin \alpha$$

(4)

$$q_2: \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} = 0 = \frac{d}{dt} [M \dot{q}_2 + m (\dot{q}_2 + \dot{q}_1 \cos \alpha)]$$

→ momento generalizado conservado (componente x do momento linear total)

$$q_1: \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} = mg \sin \alpha = \frac{d}{dt} [m (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 \cos \alpha)]$$

$$= m (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 \cos \alpha)$$

Derivando o momento conservado:

$$M \ddot{q}_2 + m (\ddot{q}_2 + \ddot{q}_1 \cos \alpha) = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{q}_2 = - \frac{m}{M+m} \ddot{q}_1 \cos \alpha, \text{ e ficamos com}$$

$$mg \sin \alpha = m \ddot{q}_1 \left(1 - \frac{m}{M+m} \cos^2 \alpha\right),$$

$$\ddot{q}_1 = \frac{g \sin \alpha}{1 - \frac{m}{M+m} \cos^2 \alpha} \quad (\text{constante})$$

$$\Rightarrow \text{tempo para deslizamento} = \sqrt{\frac{2l}{\ddot{q}_1}}$$

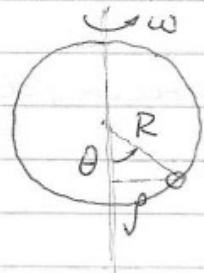
casos especiais:

$$(i) \alpha = \pi/2 \Rightarrow \ddot{q}_1 = g$$

$$(ii) M \rightarrow \infty \Rightarrow \ddot{q}_1 = g \sin \alpha$$

$$(iii) M \rightarrow 0 \Rightarrow$$

Exemplo 4: conta em círculo de arame girante (sem atrito, $\dot{\phi} = \omega$ constante)



Encontre posições de equilíbrio e discuta estabilidade

velocidade da conta (relativa a referencial inercial): $v_{\phi} = r\omega = R \sin \theta \omega$,
e $v_{\theta} = R \dot{\theta}$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} m R^2 (\dot{\theta}^2 + \omega^2 \sin^2 \theta)$$

$$U = \frac{1}{2} m g R (1 - \cos \theta) \quad (\text{relativa à base do aro})$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2} m R^2 (\dot{\theta}^2 + \omega^2 \sin^2 \theta) - m g R (1 - \cos \theta)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = m R^2 \omega^2 \sin \theta \cos \theta - m g R \sin \theta$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = m R^2 \dot{\theta}$$

$$\Rightarrow m R^2 \omega^2 \sin \theta \cos \theta - m g R \sin \theta = m R^2 \ddot{\theta},$$

ou

$$\ddot{\theta} = \left(\omega^2 \cos \theta - \frac{g}{R} \right) \sin \theta$$

(que não pode ser resolvida analiticamente em termos de funções elementares)

Posições de equilíbrio: (nas quais, se $\dot{\theta} = 0$, a conta permanece em repouso)

$$\ddot{\theta} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\omega^2 \cos \theta - \frac{g}{R} \right) \sin \theta = 0$$

soluções:

$$(i) \sin \theta = 0 \Rightarrow \theta = 0, \pi \text{ (fácil de entender)}$$

$$(ii) \omega^2 \cos \theta - \frac{g}{R} = 0 \Rightarrow \cos \theta = \frac{g}{\omega^2 R};$$

como $|\cos \theta| \leq 1$, esta só é possível se

$$\frac{g}{\omega^2 R} \leq 1 \Rightarrow \omega^2 \geq \frac{g}{R}$$

Neste caso, aparecem mais 2 posições de equilíbrio, nos pontos

$$\theta_0 = \pm \arccos \left(\frac{g}{\omega^2 R} \right)$$

Então: além das 2 posições de equilíbrio na base e no topo do aro, sempre presentes mesmo que ω seja pequeno, se $\omega^2 > \frac{g}{R}$ aparecem outras 2 (simétricas com relação à base).

Estabilidade dos pontos de equilíbrio:

$$(i) \theta = 0; \text{ se } \theta \text{ é pequeno, } \sin \theta \approx \theta$$

$$\cos \theta \approx 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} = \left(\omega^2 - \frac{g}{R} \right) \theta \quad ; \quad \text{logo, se } \omega^2 < \frac{g}{R} \quad (\text{rotação lenta}), \quad \ddot{\theta} = -k\theta \quad (k > 0)$$

⇓

MHS e equilíbrio é estável;
ao contrário, se $\omega^2 > \frac{g}{R}$ (rotação rápida), $\ddot{\theta} = k\theta$ ($k > 0$) e o equilíbrio é instável

(ii) $\theta = \pi$: equilíbrio é sempre instável ($\cos \theta \approx -1 \Rightarrow \ddot{\theta} = -(\omega^2 + \frac{g}{R}) \sin \theta$)

As outras Z, que só existem se $\omega^2 > \frac{g}{R}$, são estáveis:

$$\ddot{\theta} = \left(\omega^2 \cos \theta - \frac{g}{R} \right) \sin \theta$$

- se $\theta > \theta_0 \Rightarrow \cos \theta$ diminui e $\ddot{\theta} < 0 \Rightarrow$ retorno

se $\theta < \theta_0 \Rightarrow \cos \theta$ aumenta e $\ddot{\theta} > 0 \Rightarrow$ retorno

O fenômeno do desaparecimento de um (ponto de) equilíbrio estável e o aparecimento simultâneo de 2 outros divergindo a partir daquele é chamado de bifurcação (no exemplo, acontece quando $\omega^2 = \frac{g}{R}$)

Dispositivo como este foi usado por James Watt (1736-1823) para controlar o funcionamento de máquinas a vapor $\rightarrow$ quando a "conta" alcançava uma

certa altura interrompia o suprimento de vapor.

— 15/05/09 —

Exemplo 5: oscilações da conta próximas ao equilíbrio (estável)

(i) se $\omega^2 < \frac{g}{R}$, equilíbrio estável em $\theta = 0$, e

$$\ddot{\theta} = - \left(\frac{g}{R} - \omega^2 \right) \theta = - \Omega^2 \theta,$$

$$\Omega = \sqrt{\frac{g}{R} - \omega^2} \quad (\text{MHS com frequência } \Omega)$$

$$\Rightarrow \theta(t) = A \cos(\Omega t - \delta)$$

(ii) se $\omega^2 > g/R \Rightarrow$ equilíbrio estável em θ_0 dado por $\omega^2 \cos \theta_0 - g/R = 0$ (e seu simétrico);

pequeno deslocamento ϵ : $\theta = \theta_0 + \epsilon$

$$\cos(\theta_0 + \epsilon) \approx \cos \theta_0 - \epsilon \sin \theta_0$$

$$\sin(\theta_0 + \epsilon) \approx \sin \theta_0 + \epsilon \cos \theta_0$$

$\Downarrow$

$$\ddot{\theta} = \left[\omega^2 \cos(\theta_0 + \epsilon) - \frac{g}{R} \right] \sin(\theta_0 + \epsilon) =$$

$$= \left[\cancel{\omega^2 \cos \theta_0} - \epsilon \omega^2 \sin \theta_0 - \cancel{\frac{g}{R}} \right] [\sin \theta_0 + \epsilon \cos \theta_0]$$

$\Downarrow$

$$\ddot{\epsilon} = - \epsilon \omega^2 \sin^2 \theta_0 = - \Omega'^2 \epsilon \quad (\text{em 1ª ordem em } \epsilon)$$

$$\Omega' = \omega \sin \theta_0 = \sqrt{\omega^2 - \left(\frac{g}{\omega R} \right)^2}$$

(MHS com frequência angular Ω')

7.6 Momento generalizado e coordenadas ignoráveis

Num sistema com n coordenadas generalizadas q_i , $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = F_i$ (que chamamos de força generalizada, apesar de não ter necessariamente dimensão de força) e $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = p_i$ (momento generalizado).

Com esta terminologia, as eq. Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \quad \text{podem ser escritas como}$$

$$F_i = \frac{d}{dt} p_i$$

Em particular, se $\mathcal{L}$ não depende da coordenada q_i , $F_i = 0$ e o momento generalizado p_i é conservado.

Exemplo: partícula sujeita apenas ao peso
 $\mathcal{L} = \mathcal{L}(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz$ (z vertical para cima).

Como $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0$, p_x e p_y são conservados

Em coordenadas polares 2D, a componente ϕ da força generalizada é o torque (projecção z) e a do momento generalizado é o momento angular (projecção z). Portanto, se a Lagrangeana de uma partícula em 2D é independente de ϕ , l_z é conservado.

Se $\mathcal{L}$ não depende de q_i , esta coordenada é dita cíclica, ou ignorável. Sempre que possível devemos escolher tantas coordenadas quanto o possível que sejam ignoráveis $\Rightarrow$ leis de conservação.

A frase " $\mathcal{L}$ não depende de q_i " é equivalente a dizer que " $\mathcal{L}$ não muda, ou é invariante", quando q_i muda, todas as outras coordenadas mantidas fixas."

$\Rightarrow$ Se $\mathcal{L}$ é invariante por mudanças em q_i , p_i é conservado.

Esta conexão entre invariância (simetria) de $\mathcal{L}$ e lei de conservação é o primeiro de uma série de resultados similares relacionando a invariância sob transformações (translações, rotações, e outras) à leis de conservação. Estes resultados são conhecidos coletivamente como o teorema de Noether (Emma Noether, matemática alemã, 1882 - 1935).

O formalismo lagrangeano pode ser estendido para incluir sistemas + gerais do que os abordados aqui. Forças dissipativas podem, também, às vezes ser incluídas, mas devemos admitir que o formalismo é + adequado quando elas são desprezíveis.

7.8. Mais sobre as leis de conservação

• Conservação do momento total

Considere sistema isolado de N partículas; ele é invariante por (sob) translações: se trasladarmos todas as partículas de $\vec{E}$ ($\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}_i + \vec{E}$), nenhuma propriedade física do sistema pode se alterar. Em particular,

$$U(\vec{r}_i + \vec{E}, t) = U(\vec{r}_i, t) \Rightarrow \delta U = 0$$

(δ : mudança por translação)

$$\text{Mas } \delta T = 0 \text{ também } (\dot{\vec{r}}_i + \dot{\vec{E}} = \dot{\vec{r}}_i)$$

$$\delta \mathcal{L} = 0$$

Isto vale qualquer que seja $\vec{E}$ - em particular, se $\vec{E} = \epsilon \hat{x}$ (ϵ pequeno),

$$\delta \mathcal{L} = \epsilon \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} + \dots + \epsilon \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_N} = 0 \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^N \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{\alpha}} = 0$$

$$\text{Mas (Lagrange)} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{\alpha}} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{\alpha}} = \frac{d}{dt} p_{\alpha x}$$

$$\Rightarrow \sum_{\alpha=1}^N \frac{d}{dt} p_{\alpha x} = \frac{d}{dt} P_x = 0$$

(P_x : componente x do momento total)

$$\vec{P} = \sum_{\alpha} \vec{p}_{\alpha}$$

$\Rightarrow \vec{P}$ é conservado

• Conservação da energia

Se $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\vec{r}_i, \dot{\vec{q}}_i, t)$,

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L} = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \underbrace{\sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i}_{P_i} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

Eq. Lagrange: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \dot{p}_i$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \mathcal{L} = \sum_i (\dot{p}_i \dot{q}_i + p_i \ddot{q}_i) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

$$= \frac{d}{dt} \sum_i (p_i \dot{q}_i) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

Em muitos casos interessantes $\mathcal{L}$ não depende explicitamente de t ($\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$), e resulta

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_i [p_i \dot{q}_i] - \mathcal{L} \right) = 0$$

Defino $\mathcal{H} = \sum_i (p_i \dot{q}_i) - \mathcal{L}$ como a (função) Hamiltoniana do sistema, e

Se $\mathcal{L}$ não depende explicitamente de t , $\mathcal{H}$ é conservada.

$\mathcal{H}$ é a base da formulação Hamiltoniana da Mecânica. Em muitas situações, ela é a energia total do sistema. Isto é, se a relação entre as coordenadas generalizadas e as cartesianas são independentes de t ,

$$\vec{r}_\alpha = \vec{r}_\alpha(q_1, \dots, q_N), \quad (\text{coordenadas naturais})$$

$$\mathcal{H} = T + U$$

Demonstrações:

$$T = \frac{1}{2} \sum_\alpha m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha^2 \quad ; \quad \text{em coordenadas generalizadas:}$$

$$\dot{\vec{r}}_\alpha = \sum_{i=1}^N \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i} \dot{q}_i$$

$$\dot{\vec{r}}_\alpha \cdot \dot{\vec{r}}_\alpha = \sum_j \left(\frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_j} \dot{q}_j \right) \cdot \sum_k \left(\frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_k} \dot{q}_k \right), \text{ e}$$

MG 7.27

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[\sum_j \left(\frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right) \cdot \sum_k \left(\frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k \right) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \sum_j \sum_k \underbrace{\left[\sum_{\alpha} m_{\alpha} \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial \dot{q}_j} \cdot \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial \dot{q}_k} \right]}_{A_{jk}} \dot{q}_j \dot{q}_k$$

Calcule $p_i \left(= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right)$:

$$p_i = \sum_j A_{ij} \dot{q}_j \quad ; \quad \text{Logo,}$$

$$\sum_i p_i \dot{q}_i = \sum_i \left(\sum_j A_{ij} \dot{q}_j \right) \dot{q}_i = \sum_{i,j} A_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j = 2T,$$

e

$$\mathcal{H} = 2T - (T - U) = T + U$$

Portanto, em coordenadas naturais, se a Lagrangeana não depende explicitamente de t ($\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$, $\mathcal{L}$ é invariante por translações ∂_t temporais), a energia total é conservada (Noether),

-18/05/09-